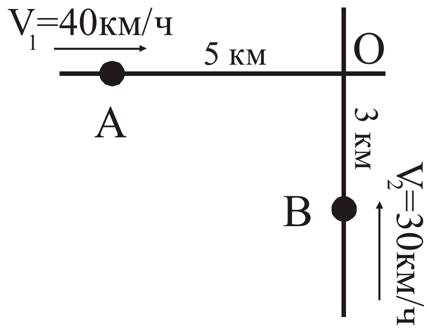
Олимпиада «Наследники левши» по математике

11 класс

Отборочный этап

1. Два велосипедиста равномерно движутся по взаимно перпендикулярным дорогам по направлению к перекрестку этих дорог. Один из них движется со скоростью 40 км/ч и находится на расстоянии 5 км от перекрестка, второй движется со скоростью 30 км/ч и находится на расстоянии 3 км от перекрестка, через сколько минут расстояние между велосипедистами станет наименьшим? Каково будет это наименьшее расстояние.



Опираясь на рисунок, сведем задачу к нахождению гипотенузы треугольника AOB с перемещающимися точками A и B.

Пусть t – время, прошедшее до встречи, тогда:

$AO = 5 - 40t,\ BO = 3 - 30t$

$S = AB = \sqrt{(5-40t)^2 + (3-30t)^2} = \sqrt{2500t^2 - 580t + 34}$

Найдем экстремум функции $S = S(t)$:

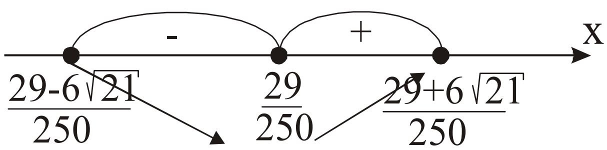
ООФ:

$700t^2 - 580t + 34 \ge 0 \Rightarrow t \in \left[\frac{29-6\sqrt{21}}{250}; \frac{29+6\sqrt{21}}{250}\right]$

$S' = \frac{2500t - 290}{\sqrt{2500t^2 - 580t + 34}}$

а) $S' = 0 \Rightarrow t = \frac{29}{250}$

б) $S' - не\ \ существует \Rightarrow t = \frac{29 \pm 6\sqrt{21}}{250}$



$S\left(\frac{29}{250}\right) = \sqrt{2500 \cdot \left(\frac{29}{250}\right)^2 - 580 \cdot \left(\frac{29}{250}\right) + 34} = 0{,}6$

Ответ: $t = \frac{29}{250}$ час. $S = 0{,}6$ км

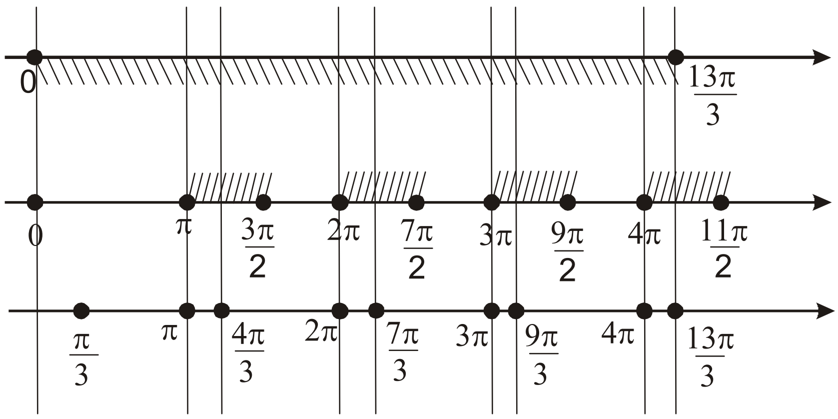
2. Решить уравнение $\left(\sqrt{\sqrt{3}\sin x \cos x} + \sin x\right)\sqrt{13\pi x - 3x^2} = 0$.

Данное уравнение эквивалентно следующей системе:

$$\begin{cases}13\pi x-3x^2=0\\ 13\pi x-3x^2\ge 0\\ \sqrt{\sqrt{3}\sin x\cos x}=-\sin x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\dfrac{13\pi}{3}\end{array}\right.\\ x\in\left[0;\dfrac{13\pi}{3}\right]\\ \sin x\cos x\ge 0\\ -\sin x\ge 0\\ \sqrt{3}\sin x\cos x=\sin^2 x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\dfrac{13\pi}{3}\end{array}\right.\\ x\in\left[0;\dfrac{13\pi}{3}\right]\\ \cos x\le 0\\ \sin x\le 0\\ \left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=0\end{array}\right.\end{cases}\Rightarrow$$

Вынесем полученное на числовые оси:

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\dfrac{13\pi}{3}\end{array}\right.\\ x\in\left[0;\dfrac{13\pi}{3}\right]\\ x\in\left[\pi+2\pi n;\dfrac{3\pi}{2}+2\pi n\right]\cup\{\pi n\}\\ \left[\begin{array}{l}x=\pi n\\ x=\dfrac{\pi}{3}+\pi m\end{array}\right.\end{cases}$$



Ответ: $x=\left\{0,\pi,\dfrac{4\pi}{3},4\pi,\dfrac{7\pi}{3},3\pi,\dfrac{9\pi}{3},4\pi,\dfrac{13\pi}{3}\right\}$

3. Решить неравенство $\dfrac{\log_9(2-x)-\log_{15}(2-x)}{\log_{15}x-\log_{25}x}\le\log_{25}9$.

Найдем область допустимых значений:

$$\begin{cases}2-x>0\\ x>0\\ x\ne 1\end{cases}\Rightarrow x\in(0;1)\cup(1;2)$$

$$\frac{\dfrac{\log_5(2-x)}{\log_5 9}-\dfrac{\log_5(2-x)}{\log_5 15}}{\dfrac{\log_5 x}{\log_5 15}-\dfrac{\log_5 x}{\log_5 25}}\le\log_5 3$$

$$\frac{\log_5(2-x)}{\log_5 x}\cdot\frac{\dfrac{1}{2\log_5 3}-\dfrac{1}{\log_5 3+1}}{\dfrac{1}{\log_5 3+1}-\dfrac{1}{2}}\le\log_5 3$$

$$\log_x(2-x)\cdot\frac{\dfrac{1-\log_5}{2\log_5 3(\log_5 3+1)}}{\dfrac{1-\log_5}{2\cdot(\log_5 3+1)}}\le\log_5 3$$

$$\log_x(2-x)\cdot\frac{1}{\log_5 3}\le\log_5 3\text{, т.к. }\log_5 3>0\text{, то}$$

$$\log_x(2-x)\le\log_5^2 3$$

Очевидно, что $\log_3^2 3>0$, а значит, если $\log_x(2-x)\le 0$ на ОДЗ то неравенство $\log_x(2-x)\le\log_5^2 3$ будет верным, проверим:

$$\log_x(2-x)\le 0$$

$$(x-1)(1-x)\le 0$$

$$(x-1)^2)\ge 0$$

Очевидно, что последнее неравенство верно на ОДЗ, а следовательно предположение так же верно, а значит неравенство $\log_x(2-x)\le\log_5^2 3$ верно на ОДЗ.

Ответ: $x\in(0;1)\cup(1;2)$

4. Найти все значения параметра a, при котором система имеет ровно один корень

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2+4x-6y+13}+\sqrt{x^2+y^2-2x-6y+10}=3\\ x^2-2ax+a^2+8x-9a+18=y\end{cases}$$

Упростим данную систему:

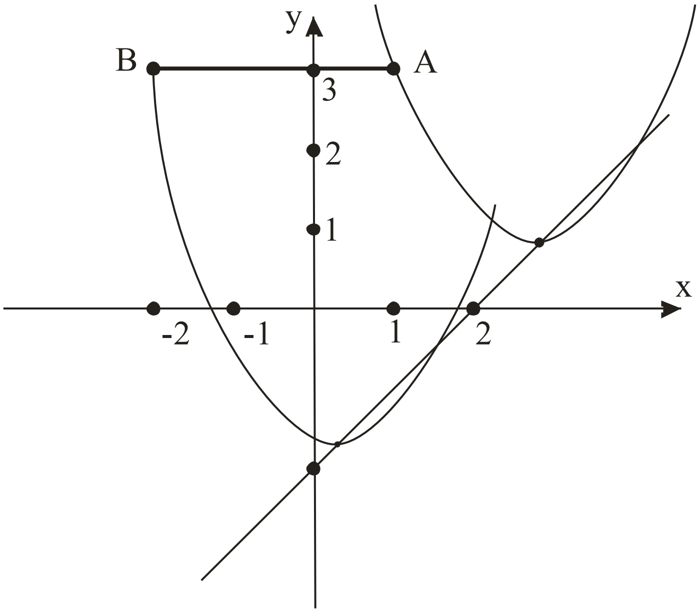
$$\begin{cases}\sqrt{(x+2)^2+(y-3)^2}+\sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2}=3\\ (x-a+4)^2+(2-a)=y\end{cases}$$

$\sqrt{(x+2)^2+(y-3)^2}+\sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2}=3$ - уравнение отрезка AB;

$(x-a+4)^2+(2-a)=y$ - парабола $y=x^2$ с ветвями вверх и плавающей вершиной $(a-4;\ 2-a)$, найдем путь вершины:

$$\begin{cases}x=a-4\\ y=2-a\end{cases}\Rightarrow y=-x-2$$

Вынесем все полученное на координатную плоскость



По рисунку видно, что ровно один корень будет в двух случаях:

1) левая дуга параболы движется от точки А до точки В;

подставим точку $A(1,3)$ в уравнение $x=-\sqrt{y+a-2}+a-4$, получим

$$\sqrt{a+1}=a-5 \Rightarrow \begin{cases} a+1\ge 0 \\ a-5\ge 0 \\ a+1=a^2-10a+25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\ge 5 \\ a^2-11a+24=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\ge 5 \\ \left[\begin{array}{l} a=3 \\ a=8 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow a=8$$

подставим точку $B(-2,3)$ в уравнение $x=-\sqrt{y+a-2}+a-4$, получим

$$\sqrt{a+1}=a-2 \Rightarrow \begin{cases} a+1\ge 0 \\ a-2\ge 0 \\ a+1=a^2-4a+4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\ge 2 \\ a^2-5a+3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\ge 2 \\ a=\dfrac{5\pm\sqrt{13}}{2} \end{cases} \Rightarrow a=\frac{5+\sqrt{13}}{2}$$

$$\frac{5+\sqrt{13}}{2}\le a\le 8$$

2) правая дуга параболы движется от точки А до точки В;

подставим точку $A(1,3)$ в уравнение $x=\sqrt{y+a-2}+a-4$, получим

$$\sqrt{a+1}=-a+5 \Rightarrow \begin{cases} a+1\ge 0 \\ 5-a\ge 0 \\ a+1=a^2-10a+25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\ge -1 \\ a\le 5 \\ a^2-11a+24=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1\le a\le 5 \\ \left[\begin{array}{l} a=3 \\ a=8 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow a=3$$

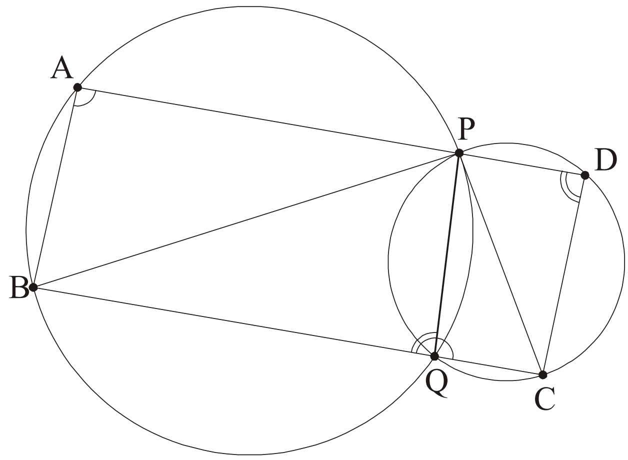
подставим точку $B(-2,3)$ в уравнение $x=\sqrt{y+a-2}+a-4$, получим

$$\sqrt{a+1}=2-a \Rightarrow \begin{cases} a+1\ge 0 \\ 2-a\ge 0 \\ a+1=a^2-4a+4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\ge -1 \\ a\le 2 \\ a^2-5a+3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1\le a\le 2 \\ a=\dfrac{5\pm\sqrt{13}}{2} \end{cases} \Rightarrow a=\frac{5-\sqrt{13}}{2}$$

$$\frac{5-\sqrt{13}}{2}\le a\le 3$$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} \dfrac{5-\sqrt{13}}{2} \le a \le 3 \\ \dfrac{5+\sqrt{13}}{2} \le a \le 8 \end{array}\right.$

5. Две окружности пересекаются в точках P и Q. Прямая, проходящая через точку P, второй раз пересекает первую окружность в точке A, а вторую — в точке D. Прямая, проходящая через точку Q параллельно AD, второй раз пересекает первую окружность в точке B, а вторую — в точке C. Найдите отношение $CP : PB$, если радиус первой окружности втрое больше радиуса второй.



Четырехугольники $APQB$, и $PDCQ$ являются вписанными, а значит сумма противолежащих углов равна 180°, т.е. $\angle BAP + \angle PQB = 180$ и $\angle PDC + \angle PQC = 180$

углы $\angle BQP + \angle PQC = 180^{o}$ как смежные, значит:

$$\angle BQP = \angle PDC$$

$$\angle BAP = \angle PQC$$

Рассмотрим треугольники

ΔBQP: $\dfrac{BP}{\sin \angle BQP} = 2R_1 \Rightarrow BP = 2R_1 \sin \angle BQP = 2R_1 \sin \angle PDC$

ΔPDC: $\dfrac{PC}{\sin \angle PDC} = 2R_2 \Rightarrow PC = 2R_2 \sin \angle PDC$

Найдем искомое отношение, зная что $\dfrac{R_1}{R_2} = \dfrac{1}{3}$:

$$\frac{CP}{BP} = \frac{2R_1 \sin \angle PDC}{2R_2 \sin \angle PDC} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{1}{3}$$

Заключительный этап

1. За время хранения вклада в банке проценты по нему начислялись ежемесячно сначала в размере 5%, затем 12%, потом $11\frac{1}{9}\%$ и, наконец, 12,5% в месяц. известно, что под действием каждой новой процентной ставки вклад находился целое число месяцев, а по истечении срока хранения первоначальная сумма увеличилась на $104\frac{1}{6}\%$. Определите срок хранения вклада.

Пусть сумму S хранили n месяцев под 5% в месяц, m под 12%, k под $11\frac{1}{9}\%$, l под 12,5% :

$$S\cdot\left(\frac{105}{100}\right)^n\left(\frac{112}{100}\right)^m\left(\frac{10}{9}\right)^k\left(\frac{1250}{1000}\right)^l=\frac{1225}{600}S$$

$$\left(\frac{21}{20}\right)^n\left(\frac{28}{25}\right)^m\left(\frac{10}{9}\right)^k\left(\frac{9}{8}\right)^l=\frac{49}{24}$$

$$\left(\frac{3\cdot 7}{2^2\cdot 5}\right)^n\left(\frac{2^2\cdot 7}{5^2}\right)^m\left(\frac{2\cdot 5}{3^2}\right)^k\left(\frac{3^2}{2^3}\right)^l=\frac{7^2}{2^3\cdot 3}$$

$$\frac{3^n\cdot 7^n\cdot 2^{2m}\cdot 7^m\cdot 2^k\cdot 5^k\cdot 3^{2l}}{2^{2n}\cdot 5^n\cdot 5^{2m}\cdot 3^{2k}\cdot 2^{3l}}=\frac{7^2}{2^3\cdot 3}$$

$$2^{2m+k+2l+3}\cdot 3^{n+2l+1}\cdot 5^k\cdot 7^{n+m}=2^{2n+3l}\cdot 3^{2k}\cdot 5^{n+2m}\cdot 7^2$$

Приравняем степени соответствующих оснований:

$$\begin{cases}2m+k+2l+3=2n+3l\\ n+2l+1=2k\\ k=n+2m\\ n+m=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}n=1\\ m=1\\ k=3\\ l=4\end{cases}$$

Ответ: 9 месяцев.

2. Решить уравнение $\dfrac{\sqrt{2\sin^2 x+\sin x}\cdot\log_3\left(\cos^2 x+2\cos x+1\right)}{\sqrt{-x^2-\frac{7\pi}{2}x-\frac{5\pi^2}{2}}}=0$

Область допустимых значений:

$$\begin{cases} 2\sin^2 x + \sin x \ge 0 \\ \cos^2 x + 2\cos x + 1 > 0 \\ -x^2 - \dfrac{7\pi}{2}x - \dfrac{5\pi^2}{2} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin x(2\sin x + 1) \ge 0 \\ (\cos x + 1)^2 > 0 \\ -\left(x + \dfrac{5\pi}{2}\right)(x + \pi) > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x \in [\pi n; \pi + 2\pi n] \cup \left[\dfrac{7\pi}{6} + 2\pi n; \dfrac{11\pi}{6} + 2\pi n\right] \\ x \ne \pi + 2\pi k \\ x \in \left(-\dfrac{5\pi}{2}; -\pi\right) \end{cases} \Rightarrow x \in (-2\pi; -\pi]$$

$2\sin^2 x + \sin x = 0$ или $\cos^2 x + 2\cos x + 1 = 1$

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \sin x = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi n \\ x = \dfrac{7\pi}{6} + 2\pi k \\ x = \dfrac{11\pi}{6} + 2\pi l \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \cos x = -2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n \\ \varnothing \end{array}\right.$$

Согласуя с ОДЗ, получим $x = -\dfrac{3\pi}{2}$, $x = -2\pi$

3. Решить неравенство $\log_x(\sqrt{x^2 + 2x - 3} + 2) \cdot \log_5(x^2 + 2x - 2) \ge \log_x 4$.

Область допустимых значений:

$$\begin{cases} x^2 + 2x - 3 \ge 0 \\ x^2 + 2x - 2 > 0 \\ x > 0 \\ x \ne 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-1)(x+3) \ge 0 \\ x > 0 \\ x \ne 1 \end{cases}$$

4. Уравнение $2x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ с целыми коэффициентами имеет три различных корня. Оказалось, что первый корень является синусом, второй – косинусом, а третий – тангенсом одного и того же угла. Найти все такие уравнения.

Пусть $x_1 = \sin x$, $x_2 = \cos x$, $x_3 = tgx$ корни данного уравнения.

Воспользуемся теоремой Виета для приведенного уравнения

$$x^3 + \frac{a}{2}x^2 + \frac{b}{2}x + \frac{c}{2} = 0$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{a}{2} \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = \dfrac{b}{2} \\ x_1x_2x_3 = -\dfrac{c}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin x + \cos x + tgx = -\dfrac{a}{2} \\ \sin x \cos x + \cos x tgx + \sin x tgx = \dfrac{b}{2} \\ \sin x \cos x \, tgx = -\dfrac{c}{2} \end{cases}$$

Очевидно, что последнее уравнение имеет вид $\sin^2 x = -\frac{c}{2}$, т.к. c целое, а $0 \le \sin^2 x \le 1$, то c может принимать значения $\{0, 1, 2\}$, проанализируем их:

1. Если $c = 0 \Rightarrow \sin^2 x = 0 \Rightarrow tgx = 0$ что противоречит условию;
2. Если $c = 1 \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ как видим число иррациональное и что бы a стало целым необходимо в первом уравнении системы иметь

$$\cos x = -\sin x$$

а значит, получим наборы:

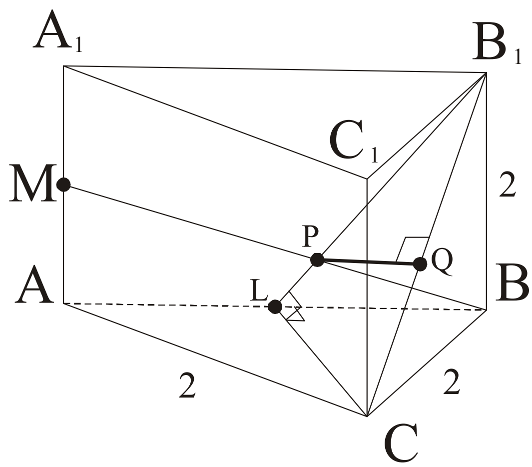
а) $\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}, tgx = -1 \Rightarrow a = 2, b = -1, c = 1$

б) $\sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}, tgx = -1 \Rightarrow a = 2, b = -1, c = 1$

3. Если $c = 2 \Rightarrow \sin^2 x = 1 \Rightarrow \cos x = 0 \Rightarrow tgx$ −не существует;

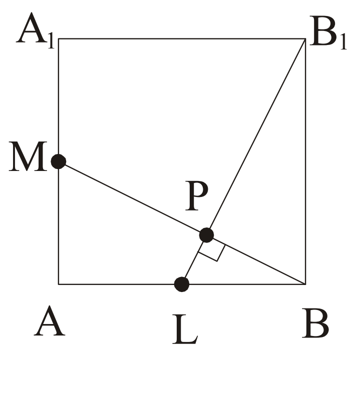
Ответ: $2x^3 + 2x^2 - x + 1 = 0$

5. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все рёбра равны 2. Точка M — середина ребра AA_1. Найдите расстояние между прямыми MB и B_1C.



Построим высоту LC, $BB_1 \perp AB$ по условию, $LC \perp AB$ по построению, а значит $LC \perp LB_1$ по теореме о трех перпендикулярах. Значит из $LC \perp LB_1$ и $LC \perp AB$ следует, что плоскости AA_1B_1B и CLB_1 взаимно перпендикулярны.

Расстояние между скрещивающимися прямыми равно расстоянию между их проекциями на плоскость перпендикулярную одной из них. Этой плоскостью является CLB_1, а искомое расстояние равно длине отрезка PQ.

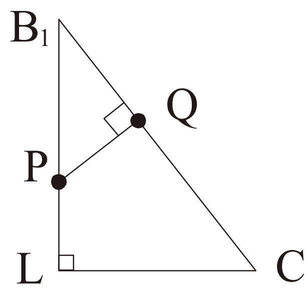


Докажем, что треугольник BPL прямоугольный

$\sin\angle MBA = \frac{1}{\sqrt{5}}$, а $\sin\angle B_1LB = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \sin(\angle MBA + \angle B_1LB) = 0$

а значит $\angle LPB = 90^o$.

Из $\Delta BPB_1, \angle BPB_1 = 90^o \Rightarrow B_1P = BB_1 \cdot \cos\angle PB_1B = 2\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}}$



Из ΔABC: $LC = \sqrt{AC^2 - LB^2} = \sqrt{3}$

Из ΔLBB_1: $B_1L = \sqrt{BB_1^2 + LB^2} = \sqrt{5}$

Из ΔLB_1C: $tg\angle LB_1C = \frac{LC}{LB_1} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \Rightarrow \cos\angle LB_1C = \sqrt{\frac{5}{8}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin\angle LB_1C = \sqrt{\frac{3}{8}}$

Из ΔPB_1Q: $PQ = PB_1 \cdot \sin\angle LB_1C = \frac{4}{\sqrt{5}}\sqrt{\frac{3}{8}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{10}}$