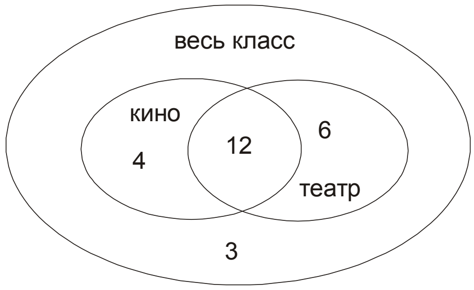
Олимпиада 10 класс (I тур)

1. В классе учится 25 учащихся. Несколько из них ходили в кино, 18 человек ходили в театр, причём и в кино, и в театр ходили 12 человек. Известно, что трое не ходили ни в кино, ни в театр. Сколько человек из класса ходили в кино?

Решение:

12 человек ходили и в кино, и в театр. А всего в театр ходило 18 человек. Значит, 6 человек ходили только в театр. Сходили в театр или в кино и в театр, или никуда не ходили — 12+6+3=21 человек. Значит, 25-21=4 человека ходили только в кино. И значит всего в кино сходило 12+6=18 человек.



2. Решить уравнение $\sin x \cos x \cos 2x \cos 8x = \frac{1}{4}\sin 12x$.

$$\frac{1}{2}\sin 2x \cos 2x \cos 8x = \frac{1}{4}\sin 12x$$

$$\frac{1}{4}\sin 4x \cos 8x = \frac{1}{4}\sin 12x$$

$$\sin 4x \cos 8x - 3\sin 4x + 4\sin^3 4x = 0$$

$$\sin 4x\left(1 - 2\sin^2 4x - 3 + 4\sin^2 4x\right) = 0$$

$$\sin 4x\left(\sin^2 4x - 1\right) = 0$$

$\sin 4x = 0$ или $\sin 4x = \pm 1$

$$\left[\begin{array}{l} 4x = \pi n,\ n \in Z \\ 4x = \pm\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi n}{4},\ n \in Z \\ x = \pm\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2},\ k \in Z \end{array}\right.$$

3. Решить уравнение $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+3} + 2\sqrt{(x-1)(x+3)} = 4 - 2x$.

Очевидно, что на области допустимых значений левая часть уравнения не отрицательна, а значит и правая должна быть такой же, найдем ОДЗ:

$$\begin{cases} x - 1 \ge 0 \\ x + 3 \ge 0 \\ 4 - 2x \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ x \ge -3 \\ x \le 2 \end{cases} \Rightarrow 1 \le x \le 2$$

Преобразуем уравнение

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{x+3} + x - 1 + 2\sqrt{(x-1)(x+3)} + x + 3 = 6$$

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{x+3} + \left(\sqrt{x-1} + \sqrt{x+3}\right)^2 = 6$$

Путь $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+3} = t$, тогда

$$t^2 + t - 6 = 0 \Rightarrow t = -3,\ t = 2,$$

Т.к. $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+3} = t$ то, при $t = -3$ корней нет, а при $t = 2$

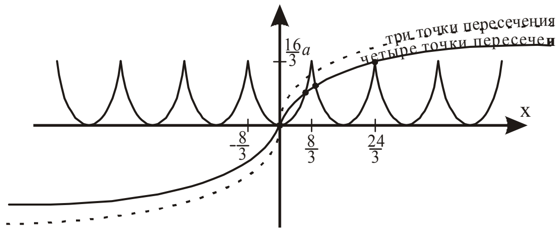
$$\sqrt{x-1} + \sqrt{x+3} = 2$$

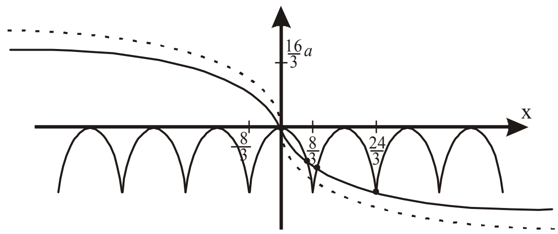
$$x - 1 + x + 3 + 2\sqrt{(x-1)(x+3)} = 4$$

$$\sqrt{(x-1)(x+3)} = 1 - x$$

$$\begin{cases} (x-1)(x+3) = (1-x)^2 \\ 1 - x \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x \le 1 \end{cases} \Rightarrow x = 1, \text{ с ОДЗ согласуется.}$$

4. Найти все значения параметра a, при котором функции $f(x)=|a+2|\sqrt[3]{x}$ и $g(x)=ax^2$ имеют ровно четыре точки пересечения, причем функция $g(x)=ax^2$ определена на промежутке $-\frac{8}{3}\le x\le\frac{8}{3}$ с периодом $T=\frac{16}{3}$.





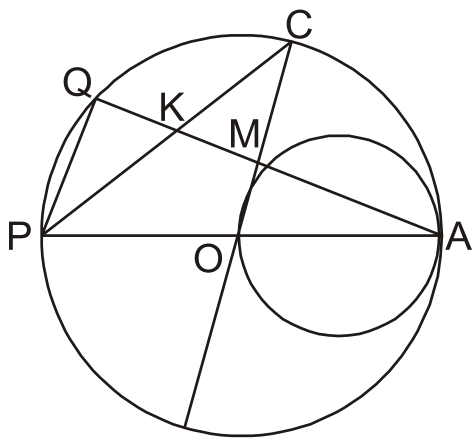
Для получения решения, имеет смысл, построить графики функций $g(x)=ax^2$ и $f(x)=|a+2|\sqrt[3]{x}$.

По чертежу видно, что при $a>0$, указанное условие будет достигнуто при условии, что функция $f(x)=|a+2|\sqrt[3]{x}$ пройдет через точку $\left(\frac{24}{3};\frac{16a}{3}\right)$ или для условия $a<0$, через точку $\left(\frac{24}{3};-\frac{16a}{3}\right)$.

$$\begin{cases} a>0 \\ \frac{16a}{3}=|a+2|\sqrt[3]{\frac{24}{3}} \end{cases} \quad \begin{cases} a>0 \\ \frac{8a}{3}=a+2 \end{cases} \quad \begin{cases} a>0 \\ a=\frac{6}{5} \end{cases}$$

Ответ: $a=\frac{6}{5}$, $a=-\frac{6}{11}$

5. Две окружности касаются внутренним образом в точке A, причём меньшая окружность проходит через центр O большей. Диаметр BC большей окружности вторично пересекает меньшую окружность в точке M, отличной от A. Лучи AO и AM вторично пересекают большую окружность в точках P и Q соответственно. Точка C лежит на дуге AQ большей окружности, не содержащей точку P. Известно, что $\sin\angle AOC=\frac{\sqrt{15}}{4}$. Прямые PC и AQ пересекаются в точке K. Найдите отношение $\frac{QK}{KA}$.



а) Угол AQP опирается на диаметр AP большей окружности, поэтому он прямой. Угол AMO опирается на диаметр AO меньшей окружности, поэтому он прямой. Таким образом, прямые PQ и BC перпендикулярны прямой AQ, значит, они параллельны.

б) Углы AOC и APQ равны, поскольку прямые PQ и BC параллельны. Диаметр BC большей окружности перпендикулярен хорде AQ. Значит, точка C — середина дуги AQ. Следовательно, луч PC является биссектрисой угла APQ прямоугольного треугольника APQ, поэтому

$$\frac{QK}{KA}=\frac{QP}{PA}=\cos\angle APQ=\cos\angle AOC=\sqrt{1-\sin^2\angle AOC}=\frac{1}{4}$$

Ответ: 1/4

Олимпиада 10 класс (II тур)

1. Садовод привез на рынок 91 кг яблок, которые после транспортировки разделил на три сорта. Яблоки первого сорта он продавал по 40 руб., второго сорта – по 30 руб., третьего сорта – по 20 руб. за килограмм. Выручка от продажи всех яблок составила 2170 руб. Известно, что масса яблок 2-го сорта меньше массы яблок 3-го сорта на столько же процентов, на сколько процентов масса яблок 1-го сорта меньше массы яблок 2-го сорта. Сколько килограммов яблок второго сорта продал садовод?

Путь x кг яблок 1 сорта, y кг второго и z кг третьего получим:

$$\begin{cases} 40x + 30y + 20z = 2170 \\ x + y + z = 91 \end{cases}$$

Из условия масса яблок 2-го сорта меньше массы яблок 3-го сорта на столько же процентов, на сколько процентов масса яблок 1-го сорта меньше массы яблок 2-го сорта имеем:

$$\frac{y}{z} = \frac{x}{y}$$

Объединив получим:

$$\begin{cases} 4x + 3y + 2z = 217 \\ x + y + z = 91 \\ \frac{y}{z} = \frac{x}{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 35 - 2x \\ 3x^2 - 196x + 1225 = 0 \Rightarrow \\ \frac{y^2}{x} = z \end{cases} \left[\begin{array}{l} x = 7 \\ x = \frac{175}{3} \end{array}\right. \Rightarrow x = 7$$

2. Решить уравнение $6(\cos x + \sin x) - 2\sin x \cos x + 6 = 0$.

Введем замену:

$$\cos x + \sin x = t\ ,$$

$$(\cos x + \sin x)^2 = t^2$$

$$2\sin x \cos x = t^2 - 1$$

Подставим полученное:

$$6t - (t^2 - 1) + 6 = 0$$

$$t^2 - 6t - 7 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = -1 \\ t_2 = 7 \end{array}\right.$$

Проведем обратную замену:

а) $\cos x + \sin x = 7$ - корней нет;

б) $\cos x + \sin x = -1$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

$$x - \frac{\pi}{4} = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z$$

$$x_1 = \pi + 2\pi n,\ n \in Z$$

$$x_2 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$$

3. Решить уравнение $\frac{9}{(x+1)^2}+\frac{(x+1)^2}{16}=3\cdot\left(\frac{3}{x+1}-\frac{x+1}{4}\right)-\frac{1}{2}$.

Введем замену:

$$\frac{3}{x+1}-\frac{x+1}{4}=t,$$

$$\left(\frac{3}{x+1}-\frac{x+1}{4}\right)^2=t^2$$

$$\frac{9}{(x+1)^2}+\frac{(x+1)^2}{16}=t^2+\frac{3}{2}$$

Подставим полученное:

$$t^2+\frac{3}{2}=3t-\frac{1}{2}$$

$$t^2-3t+2=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}t_1=1\\t_2=2\end{array}\right.$$

Проведем обратную замену:

а) $\frac{3}{x+1}-\frac{x+1}{4}=1$

$$\frac{(x+1)^2+4(x+1)-12}{4(x+1)}=0$$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x+1=2\\x+1=-6\Rightarrow x=-7\end{array}\right.\\x\neq 1\end{cases}$$

б) $\frac{3}{x+1}-\frac{x+1}{4}=2$

$$\frac{(x+1)^2+8(x+1)-12}{4(x+1)}=0$$

$$\begin{cases}x+1=-4\pm 2\sqrt{7}\\x\neq 1\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=-5-2\sqrt{7}\\x=-5+2\sqrt{7}\end{array}\right.$$

4. Найти все значения параметра ***a***, при каждом из которых уравнение

$$3\cos^2 2x-(3a-2)\cos 2x+a-1=0$$

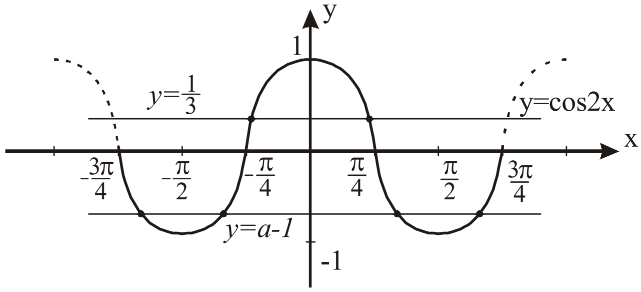
имеет ровно шесть решений на промежутке $\left[-\frac{3\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right]$.

$$3\cos^2 2x-(3a-2)\cos 2x+a-1=0$$

$$D=(3a-2)^2-12(a-1)=9a^2-24a+16=(3a-4)^2$$

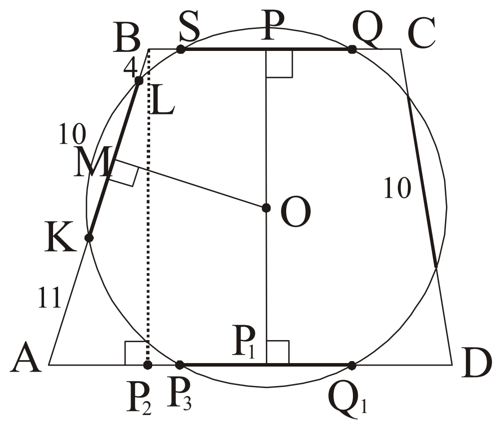
$$\cos 2x=\frac{3a-2-(3a-4)}{6}=\frac{1}{3}\qquad \cos 2x=\frac{3a-2+(3a-4)}{6}=a-1$$

Дальнейшее решение будем искать в виде пересечения графиков функций $y=\cos 2x$ с прямыми $y=\frac{1}{3}$ и $y=a-1$.



Как видно из графика прямая $y=\frac{1}{3}$ имеет с графиком $y=\cos 2x$ на промежутке $\left[-\frac{3\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right]$ ровно два корня, значит, прямая $y=a-1$ должна давать, на указанном промежутке, ровно четыре точки пересечения с графиком $y=\cos 2x$, очевидно, что $-1<a-1\le 0\Rightarrow\ 0<a\le 1$.

5. Окружность с центром в точке O высекает на всех сторонах трапеции $ABCD$ равные хорды. Найдите высоту трапеции, если окружность пересекает боковую сторону AB в точках K и L так, что $AK = 11$, $KL = 10$, $LB = 4$.



Опустим перпендикуляры из точки O на хорды SQ, KB, P_3Q_1, т.к. $SQ = KB = P_3Q_1$, то $OP = OP_1 = OM$ и точки P, P_1, M - центры данных хорд (из свойства окружности), а значит $BP = BM = 9$ и $AP_1 = AM = 16$ (из равенства прямоугольных треугольников).

Построим перпендикуляр BP_2, найдем AP_2:

BPP_1P_2 - прямоугольник, а следовательно $AP_2 = AP_1 - P_2P_1 = AP_1 - BP = 16 - 9 = 7$.

Из прямоугольного ΔABP_2:

$BP_2 = \sqrt{AB^2 - AP_2^2} = \sqrt{625 - 49} = 24$